

РАСЧЕТ СВЕТОВОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИЗОТРОПНОГО
МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В МУТНЫХ СРЕДАХ
МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Канд. техн. наук В.И. САВЕНКОВ,
студ. В.П. БУДАК

Одна из ключевых задач теоретических основ светотехники – расчет искусственных световых полей в мутных средах. Как известно, теоретические исследования процессов формирования структура световых полей в реальных средах базируются на решении уравнения переноса лучистой энергии, представляющего собой линейное интегро-дифференциальное уравнение (рис. I) [1]:

$$(\hat{\mathbf{l}}_0, \text{grad} L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0)) + \varepsilon L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0) = \frac{\varepsilon \Lambda}{4\pi} \int_{(4\pi)} x(\hat{\mathbf{l}}_0; \hat{\mathbf{l}}'_0) L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}'_0) d\omega(\hat{\mathbf{l}}'_0) + \varepsilon q(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0), \quad (1)$$

где $L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0)$ и $L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}'_0)$ – яркости излучения в точке поля $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\varphi, \theta)$ по направлению единичных векторов, фиксированного $\hat{\mathbf{l}}_0$, и произвольно ориентированного $\hat{\mathbf{l}}'_0$ в пространстве, соответственно; ε и Λ – показатель ослабления и альbedo однократного рассеяния излучения в среде соответственно; $d\omega(\hat{\mathbf{l}}'_0)$ – элементарный телесный угол с оптической осью $\hat{\mathbf{l}}'_0$; $q(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0)$ – функция источников собственного излучения среда, определяемая по формуле

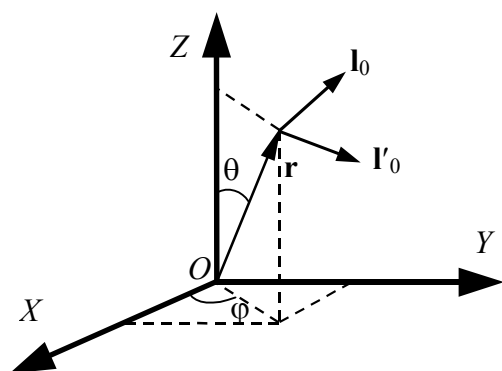


Рис.1

$$q(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^2\Phi}{dV d\omega(\hat{\mathbf{l}}_0)},$$

где $d^2\Phi$ - поток излучения элементарного объема среды dV в окрестностях точки поля \mathbf{r} , распространяющийся в элементарном телесном угле $d\omega(\hat{\mathbf{l}}_0)$.

В настоящее время в литературе не известно точное решение (1) применительно к мутным средам. В [2] описывается приближенное решение интегрального уравнения переноса, пригодное для инженерных расчетов светового поля точечного изотропного монохроматического источника света (ТИМИС) в мутных (в частности водных) средах с наличием истинного поглощения и сильно анизотропного рассеяния излучения.

Проводимые сопоставления результатов аналитических расчетов пространственно-углового распределения яркости рассеянного излучения ТИМИС в водах Черного моря [2] и основных интегральных характеристик светового поля ТИМИС в водах ряда акваторий Мирового океана [3] с данными натурных измерений, опубликованными в печати, не позволяют полностью оценить точность рассчитанных значений (несмотря на хорошее соответствие сравниваемых величин), поскольку погрешность физических экспериментов не достаточно изучена. Установить достоверность результатов приближенных аналитических расчетов можно при сопоставлении с данными математических экспериментов, которые представляют собой решение уравнения переноса численным методом на ЭВМ.

В настоящей статье описывается алгоритм решения (1) методом сферических гармоник для случая ВМС. Выбор данного метода решения объясняется следующим. Во-первых, итоговое расчетное выражение можно представить в аналитической форме в отличие от других популярных машинных методов (в частности метода Монте-Карло). Во-вторых, использование полиномов Лежандра позволяет разделить переменные в (1) о помощью теоремы сложения теории сферических функций [4], к тому же они представляют собой полный набор ортогональных

функций в интервале $(-1,1)$, т.е. в диапазоне изменения углового распределения $L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0)$. В-третьих, первые два момента сферических гармоник углового распределения $L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0)$ реальный физический смысл: нулевой момент представляет собой пространственную освещенность $E_0(r)$ и первый момент - световой вектор $|\mathcal{E}(r)|$, которые являются основными интегральными характеристиками светового поля.*)

Рассмотрим световое поле в мутной среде, создаваемое ТИМИС единичного светового потока $\Phi=1$. Предположим, что среда однородная и индикатриса рассеяния излучения инвариантна относительно вращений, т.е. $x(\hat{\mathbf{l}}_0, \hat{\mathbf{l}}'_0) = x(\hat{\mathbf{l}}_0 \cdot \hat{\mathbf{l}}'_0)$ (случай сферической симметрии). Тогда

$$L(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0) = L(r; \mu), \text{ где } \mu = \frac{(\hat{\mathbf{l}}_0, \mathbf{r})}{r} \text{ и } \varepsilon q(r; \mu) = \int_0^{2\pi} \varepsilon q(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{l}}_0) d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

где $\delta(r)$ - дельта-функция Дирака. Очевидно, что условие нормировки (2) соблюдается, т.е.

$$\Phi = \int_{-1}^1 d\mu \int q(r, \mu) dV = \int_{-1}^1 d\mu \int \frac{1}{2} \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} r^2 dr d\omega.$$

Таким образом, уравнение переноса (1) в сферических координатах примет следующий вид [1]:

$$\mu \frac{\partial L(r; \mu)}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial L(r; \mu)}{\partial \mu} + \varepsilon L(r; \mu) = \frac{\varepsilon \Lambda}{4\pi} \int x(\hat{\mathbf{l}}_0, \hat{\mathbf{l}}'_0) L(r; \mu') d\omega(\hat{\mathbf{l}}'_0) + \frac{1}{2} \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}. \quad (3)$$

Для решения (3) разложим $L(r; \mu)$, $x(\hat{\mathbf{l}}_0, \hat{\mathbf{l}}'_0)$ и $\varepsilon q(r; \mu)$ по полиномам Лежандра $P_k(\mu)$:

$$L(r; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k(r) P_k(\mu), \quad x(\hat{\mathbf{l}}_0, \hat{\mathbf{l}}'_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} f_k P_k(\hat{\mathbf{l}}_0 \cdot \hat{\mathbf{l}}'_0), \quad \varepsilon q(r; \mu) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} P_0(\mu),$$

так как при $n=0$: $q_0 = \int_{-1}^1 \varepsilon q(r; \mu) P_0(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \int_{-1}^1 P_0(\mu) d\mu = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$, а при $n \neq 0$:

$$q_n = \int_{-1}^1 \varepsilon q(r; \mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \int_{-1}^1 P_n(\mu) d\mu = 0.$$

*) Существенным недостатком метода сферических гармоник является решение громоздкой алгебраической системы уравнений (для достижения приемлемой для практики точности искомых величин необходимо удерживать большое число (несколько сотен) членов в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра).

В результате согласно [5] приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения весовых функций $C_k(r)$

$$\frac{\nu+1}{2\nu+1}r^{-\nu-2}\frac{d}{dr}(r^{\nu+2}C_{\nu+1}(r))+\frac{\nu}{2\nu+1}r^{\nu-1}\frac{d}{dr}(r^{-\nu+1}C_{\nu-1}(r))+b_\nu C_\nu(r)=\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}\delta_{0\nu}, \quad (4)$$

где $\delta_{0\nu}$ - символ Кронекера; $b_\nu = \varepsilon\left(1 - \frac{\Lambda f_\nu}{4\pi}\right)$.

Система (4) является бесконечной. На практике обычно ограничиваются некоторым N -приближением. Для этого полагают условие

$$\frac{dC_{N+1}(r)}{dr}=0, \text{ т.е. } \frac{dC_{N+1}(r)}{dr} = \int_{(4\pi)} \frac{dL(r;\mu)}{dr} P_{N+1}(\mu) d\omega = 0.$$

При этом система (4) представляет собой систему $(N+1)$ уравнений для $(N+1)$ функции $C_0(r), C_1(r), \dots, C_N(r)$. В дальнейшем будем оперировать только с нечетными N -приближениями, учитывая рекомендации [6].*)

Рассмотрим граничные условия задачи:

- 1) на бесконечности $(\forall \nu): (C_\nu(r)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0)$;
- 2) в точке $r=0$ при наличии сосредоточенного источника [7]

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 C_1(r) = \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 C_3(r) = \dots = \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 C_N(r). \quad (5)$$

Решение системы (4) при данных граничных условиях есть

$$C_\nu(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{q=1}^p a_q A_\nu(k_q) e^{-k_q r} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(\nu+j)!}{j!(\nu-j)!} \left(\frac{1}{2k_q r}\right)^{j-1}, \quad (6)$$

где $p=(N+1)/2$; a_q произвольные постоянные; A_ν определяются из рекуррентного соотношения

$$-\left((\nu+1)k_q A_{\nu+1} + \nu k_q A_{\nu-1}\right)(2\nu+1)b_\nu A_\nu = 0, \quad A_0 = 1, \quad (7)$$

k_q - положительные корни уравнений $A_{N+1}(k_q)=0$.

Из граничного условия (5) имеем для нечетных ν

*) "... N -приближения четных порядков на практике обычно не применяются ... В методе сферических гармоник они соответствуют приближение гауссовых квадратур нечетного порядка (метод Чандрасекара [1] - прим. авт.). Но при этом фазовая плотность (ее аналог в данном случае - яркость излучения в точке поля по произвольному направлению - прим. авт.) оценивается в нулях полинома $P_{N+1}(\mu)$, одним из которых является $\mu=0$. Поскольку фазовая плотность, вообще говоря, разрывна при $\mu=0$, эта процедура может оказаться неудачной ..."

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 C_v(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{q=1}^p a_q A_v(k_q) e^{-k_q r} \sum_{j=0}^v \frac{(v+j)!}{j!(v-j)!} \left(\frac{1}{2k_q r} \right)^{j-1} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{j=0}^v \frac{(v+j)!}{j!(v-j)!} \sum_{q=1}^p a_q A_v(k_q) e^{-k_q r} \left(\frac{1}{2k_q r} \right)^{j-1} = 1, \end{aligned}$$

откуда видно, что коэффициента при одинаковых степенях $v \geq 3$ и при $j \geq 2$ в случае конечности предела (5) должны быть равны нулю, т.е.

$$\sum_{q=1}^p \frac{a_q A_v(k_q)}{(2k_q)^{j-1}} = 0.$$

Для того чтобы предел (5) равнялся единице, коэффициент при $j=1$ должны быть равны

$$\sum_{q=1}^p a_q A_v(k_q) = \frac{1}{v(v+1)}. \quad (8)$$

Условий (8), число которых $p=(N+1)/2$, достаточно для определения a_q , число которых тоже p (число нечетных чисел от 0 до N).

Следовательно, решение (6) окончательно примет вид

$$C_v(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \left[2 \sum_{q=1}^p k_q a_q A_v(k_q) r e^{-k_q r} + v(v+1) \sum_{q=1}^p a_q A_v(k_q) e^{-k_q r} \right]. \quad (9)$$

Таким образом, пространственно-угловое распределение яркости рассеянного излучения ТИМИС в мутной среде будет рассчитываться по формуле

$$L(r; \mu) = \sum_{v=0}^N \frac{2v+1}{4\pi} C_v(r) P_v(\mu). \quad (10)$$

Метод сферических гармоник согласно литературным данным успешно применялся при решении различных задач теории переноса астрофизики и нейтронной физики. Центральным отличием этих задач от аналогичных задач гидрооптики и гидросветотехники следует считать различную форму индикатрис рассеяния. В первых случаях ее можно рассматривать как сферическую или близкую к ней, и поэтому в разложении по полиномам Лежандра достаточно ограничиться 5 или 7 приближениями. Тогда как в разложении индикатрис рассеяния света водных сред приходится для достижения приемлемой точности описания их формы удерживать большое число членов (100-300) [8]. На рис. 2 представлены, индикатрисы рассеяния, рассчитанные на ЭВМ "Наири-3" при использовании 101 и 311 членов в суммировании полиномов Лежан-

дра (они имеют хорошее соответствие с "тупой" морской и "молочной" индикатрисами [9] соответственно). Из сказанного ясно, что для аппроксимации реальных индикатрис рассеяния света водных сред, имеющих остронаправленный вид, целесообразно пользоваться выражениями, которые просто раскладываются по полиномам Лежандра. Наиболее удачным в этом плане является эмпирическое уравнение, предлагаемое в [10] и представляющее собой комбинацию индикатрис Хенни-Гринштейна:

$$x(\gamma) = a \frac{1 - g_1^2}{(1 + g_1^2 - 2g_1 \cos \gamma)^{3/2}} + (1 - a) \frac{1 - g_2^2}{(1 + g_2^2 - 2g_2 \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (11)$$

где g_1 и g_2 - соответственно положительное и отрицательное значения среднего косинуса угла рассеяния $\overline{\cos \gamma}$;

a - параметр ($0 \leq a \leq 1$).

Разложение (11) по полиномам Лежандра выглядит следующим образом

$$x(\gamma) = a \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) g_1^i P_i(\cos \gamma) + (1-a) \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) g_2^i P_i(\cos \gamma).$$

В результате имеем

$$f_v = a 4\pi g_1^v + (1-a) 4\pi g_2^v; \quad b_v = \varepsilon \left(1 - \Lambda \frac{f_v}{4\pi} \right) = \varepsilon \left[1 - \Lambda (a g_1^v + (1-a) g_2^v) \right].$$

Итак, последовательность алгоритма расчета светового поля ТИМИС в мутной среде методом сферических гармоник представляет собой следующее. Рассчитанные значения b_v подставляем в рекуррентное соотношение (7) и находим $A_{N+1}(k_q)$. Затем определяем корни $k_q > 0$, $q \in 1, p$ уравнения $A_{N+1}(k_q) = 0$. С помощью того же соотношения (7) и значений k_q находим $A_n(k_q)$, $n \in 0, N$, $q \in 1, p$. Найденные значения $A_n(k_q)$ подставляем в систему (8) и получаем a_q , $q \in 1, p$. Далее по формуле (9) рассчитываем весовые коэффициенты $C_n(r)$ (момент сферических гармоник углового распределения $P_v(\mu)$). При этом отметим, что нулевой и первый моменты по абсолютной величине равны пространственной освещенности $E_0(r)$ и световому вектору $|\mathcal{E}(r)|$ соответственно, т.е.

$$E_0(r) = \int_{(4\pi)} L(r; \mu) d\omega = 2\pi \int_{-1}^1 L(r; \mu) d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{4\pi} C_i(r) P_i(\mu) d\mu = C_0(r);$$

$$|\mathcal{E}(r)| = \int_{(4\pi)} L(r;\mu)\mu d\omega = 2\pi \int_{-1}^1 \mu L(r;\mu) d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{4\pi} C_i(r)\mu P_i(\mu) d\mu = C_1(r)$$

И, наконец, по формуле (10) рассчитываем пространственно-угловое распределение яркости рассеянного излучения ТИМИС в мутной среде.

Описанный алгоритм расчета реализован на ЭВМ "Наири-3" для случая 101-го приближения. Полученные результаты представлены на рис.3 и рис.4 и сопоставлены с аналогичными результатами аналитических расчетов, проведенных по формулам из [2, 3]. Как видно из графиков $\lg|\mathcal{E}(r)|$ на рис. 3, имеет место хорошее соответствие сравниваемых величин в широком диапазоне расстояний от источника излучения до расчетной точки поля. При расчетах $\lg L(r,\mu)$ наблюдалась сильная осцилляция решений в области малых углов рассеяния. Это наглядно проиллюстрировало на рис.4, где проводится сопоставление с результатами аналитических расчетов. Объяснить ее возникновение можно, вероятно, тем фактом, что при вычислении учитывались лишь "низкочастотные" полиномы Лежандра, и тем самым не полностью воспроизводилась тонкая структура рассеяния излучения, присущая мутным средам типа морской воды.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить признательность проф. М.М.Гуторову за полезные советы и замечания.

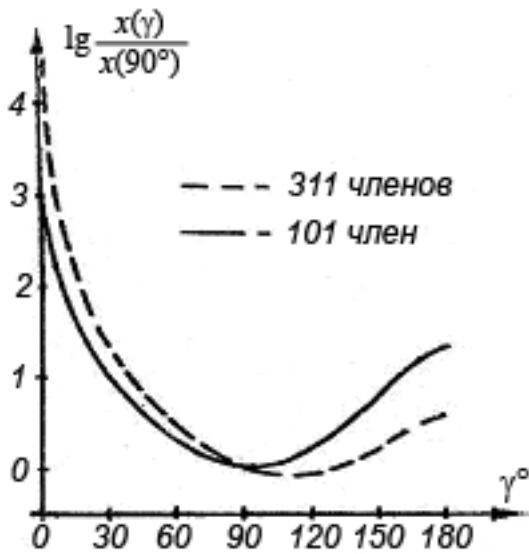


Рис. 2

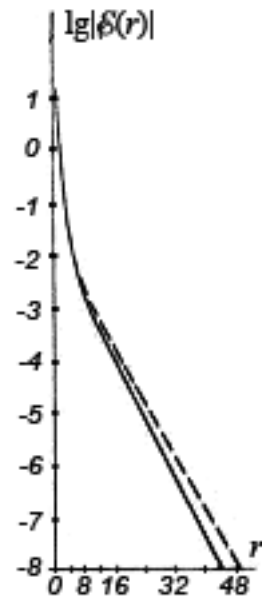


Рис. 3

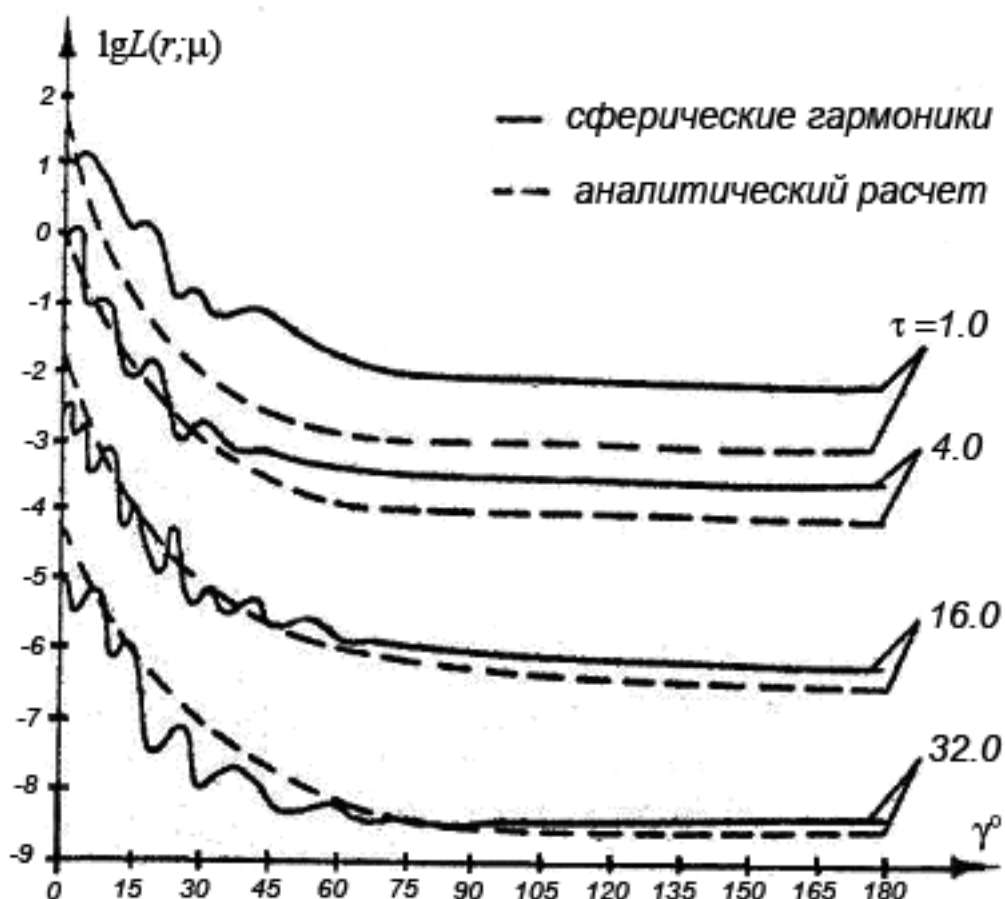


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии: Пер. с англ. /Ред. Е.С.Кузнецов. - М.: Иностран. лит., 1953. - 432с.
2. Савенков В.И., Мельников Г.А. О решении интегрального уравнения переноса применительно к световым полям в водных средах, создаваемым искусственными источниками. - В кн.: Световые поля в океане. М.: Наука, 1979, с.17-83..
3. Савенков В.И., Гуторов М.М., Мельников Г.А. Световой вектор от точечного изотропного монохроматического источника света в мутной среде. - В кн.: Световые поля в океане. - М.: Наука, 1979, с.83-85.
4. Шифрин К.С., Мороз Б.З., Шифрин Б.Ф. О разделении переменных в уравнении переноса излучения. - В кн.: Оптика океана к атмосферы. - Л.: Наука, 1972, с.79-82.

5. Дависон Б. Теория переноса нейтронов: Пер. с англ. /Ред. Г.И. Марчук. - М.: Атомиздат, 1960. - 564с.
6. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса: Пер. с англ./Ред. В.И. Масленников. - М.: Мир, 1972. - 384с.
7. Марчук Г.И., Николайшвили Ш.С. Применение метода сферических гармоник к задачам теории переноса. Общие свойства P_n -приближений. - В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. - М.: Госатомиздат, 1962, с. 5-15.
8. Иванов А.П. Физические основы гидрооптики. - Минск: Наука и техника, 1975.- 504с.
9. Савенков В.И. Эмпирическое уравнение формы индикатрис рассеяния вод Мирового океана. - Светотехника, 1978, №1, с.20-21.
10. Соловьев В.В., Шемшура В.Е. Об аппроксимации индикатрис рассеяния света морской водой индикатрисами Хеньи-Гринштейна. - Тр./Морск. гидрофиз. ин-т АН УССР, Севастополь, 1976, №2 (73), с.99-103.

УДК 551.463.5

Расчет светового поля точечного изотропного монохроматического источника в мутных средах методом сферических гармоник. Савенков В.И., Будак В.П. - Тр./Моск. энерг. ин-т, 1980, вып.488, с.42-50.