О НОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В РАМКАХ МАЛОУГЛОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Инж. В.П.БУДАК, канд.техн.наук В.И.САВЕНКОВ

Разделы физики, имеющие отношение к теории переноса излучения (сюда относится и фотометрия), имеют общую основу - это общность математических подходов к рассмотрение физических проблем, общность идей и воплощение последних, в методы решения уравнения переноса излучения (УПИ)

$$(\hat{\mathbf{l}},\nabla)L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})+\varepsilon L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})=\frac{\varepsilon\Lambda}{4\pi}\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')d\hat{\mathbf{l}}', \qquad (1)$$

где $L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$ - яркость излучения в точке $\mathbf{r}$ по направлению $\hat{\mathbf{l}}$ (здесь и далее крышкой обозначены единичные вектора); $x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')$ - индикатриса рассеяния света элементом объема среды; ε и Λ - соответственно показатель ослабления и альбедо однократного рассеяния света.

Точное решение (1), по-видимому, невозможно; поэтому на практике широко используются те или иные приближения, допускаемые условиями реальных задач. Применительно к средам с наличием сильно анизотропного рассеяния света (примером их служат атмосферный аэрозоль и морская вода) в большом цикле работ зарубежных и советских ученых был развит подход к решению УПИ, получивший название малоуглового приближения. Основные его идеи изложены в [1-3].

Так, в [1] тело яркости после n-го рассеяния излучения определялось на основе теоремы сложения для полиномов Лежандра, а распределение рассеяний по кратностям предполагалось пуассоновским. Математически такая процедура сводится к замене в УПИ направляющего косинуса на единицу, что допустимо лишь в задачах с плоской симметрией.

В [2] используется преобразование $(\hat{\mathbf{l}},\nabla)\approx\frac{\partial L}{\partial z}+(\mathbf{l}_\perp,\nabla_\perp)L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})$ (где $\mathbf{l}_\perp$ проекция $\hat{\mathbf{l}}$ на плоскость, перпендикулярную $\hat{\mathbf{k}}$; $\nabla_\perp=\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}$), а в правой части (1) проводится замена интегрирования по сфере интегрированием по плоскости, касательной к этой сфере.

Как показано в [3], в основе обоих подходов лежит пренебрежение обратным рассеянием и дисперсией путей рассеянных фотонов. При этом подход [1] допускает решение УПИ для весьма широкого класса сред с анизотропным рассеянием, но не дает возможность учесть отток энергии в сторону от направления распространения излучения. В свою очередь представления [2] справедливы только для δ-образных $x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')$, но, однако, позволяют рассчитывать интегральные характеристики диффузных световых полей (ДСП) пространственно-ограниченных источников излучения.

В настоящей статье предлагается решение УПИ для случая точечного изотропного монохроматического источника света (ТИМИС) с единичной силой света, полученное на основе обобщения идей [1].

В случае сферической симметрии УПИ имеет вид

$$\mu\frac{\partial L(r,\mu)}{\partial z}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial L(r,\mu)}{\partial\mu}+\varepsilon L(r,\mu)=\frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')L(r,\mu')d\hat{\mathbf{l}}',\ \left(\mu=\frac{(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})}{r},\ \mu'=\frac{(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')}{r}\right). \quad (2)$$

Разложим $L(r,\mu)$ и $x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')$ в (2) по полиномам Лежандра $\mathrm{P}_k(\mu)$

$$L(r,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}C_k(r)\mathrm{P}_k(\mu),\ x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')==\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}f_k\,\mathrm{P}_k(\hat{\mathbf{l}}\cdot\hat{\mathbf{l}}')\ . \quad (3)$$

В результате (2) принимает вид бесконечной системы связанных дифференциальных уравнений [4]

$$\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+2}{r}\right)C_{k+1}(r)+\frac{k}{k+1}\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)C_{k-1}(r)+b_kC_k(r)=0\ . \quad (4)$$

Допустим, что тело яркости рассеянного излучения остается анизотропным на любых расстояниях от ТИМИС, т.е. допустим, что

$$C_{k+1}(r)+C_{k-1}(r)\approx 2C_k(r)\ .$$

В этом случае (4) становится системой несвязанных уравнений

$$\frac{dC_k(r)}{dr}+\left(b_k+\frac{2}{r}\right)C_k(r)=0\ ,$$

решение которой нетрудно определить

$$C_k(r)=\mathrm{const}\frac{\exp(-b_kr)}{r^2},\ b_k=\varepsilon\left(1-\Lambda\frac{f_k}{4\pi}\right). \quad (5)$$

В граничных условиях к УПИ пренебрегаем обратным рассеянием, т.е. в качестве граничных условий к (2) примем следующие

$$C_k(r)\to\frac{1}{r^2}\ \text{при}\ r\to 0\ \text{и}\ C_k(r)\to 0\ \text{при}\ r\to\infty\ .$$

Итак, приближенное решение УПИ для случая ТИМИС окончательно выглядит следующим образом:

$$L(r,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi r^2}\exp(-b_kr)\mathrm{P}_k(\mu)\ . \quad (6)$$

Для решения большинства практических задач представляют рее интегральные характеристики ДСП. В случае ТИМИС они рассчитываются по следующим формулам:

1) пространственная освещенность

$$E_0(r)=\oint L(r,\mu)d\hat{\mathbf{l}}=\frac{\exp\left(-\varepsilon(1-\Lambda)r\right)}{r^2}\ ;$$

2) световой вектор

$$\mathcal{E}(r)=\oint L(r,\mu)\hat{\mathbf{l}}d\hat{\mathbf{l}}=\frac{\exp\left(-\varepsilon(1-\Lambda g)r\right)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\ ;$$

3) средний косинус тела яркости

$$\bar{\mu}(r)=\frac{|\mathcal{E}(r)|}{E_0(r)}=\exp\left(-\varepsilon\Lambda(1-g)r\right),\ g=\frac{f_1}{4\pi}\ .$$

Согласие теореме оптической взаимности, распределение $L(r,\mu)$ ДСП ТИМИС единичной силы света идентично распределению $E_0(r,\mu)$ (где $\mu=(\mathbf{r},\hat{\mathbf{q}})/r$, $\hat{\mathbf{q}}$ - направление излучения элементарного коллимированного излучателя (ЭКИ)) в ДСП ЭКИ единичного светового потока.

Отметим, что в [5] на основе представлений [2] получено расчетное выражение для $E_0(r,\mu)$ имевшее вид

$$E_0(r,\mu)=\frac{\exp(-\varepsilon r)}{2\pi r^2}\int_0^\infty \exp\left(\varepsilon\Lambda\int_0^r Q(k\xi)d\xi\right)x\,\mathrm{J}_0(\theta x)dx\,, \tag{7}$$

где $\mu=\cos\theta$, $x=kr$, $Q(r)$, $\mathrm{J}_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

При этом заметим, что в рамках допущений [2] справедливо

$$\int_0^r Q(k\xi)d\xi\approx Q(kr)=Q(x)r\,,$$

и, таким образом, (7) принимает вид

$$E_0(r,\mu)=\frac{\exp(-\varepsilon r)}{2\pi r^2}\int_0^\infty \exp\left(\varepsilon\Lambda Q(x)r\right)x\,\mathrm{J}_0(\theta x)dx\,. \tag{8}$$

Сопоставив (6) и (8) покажем, что (6) носит более частный характер. Ограничимся при анализе (6) лишь областью малых углов рассеяния света, для которой справедливы соотношения

$$\mathrm{P}_k(\mu)\approx \mathrm{J}_0(k\theta),\;\; f_k\approx 4\pi Q(k),\;\; \sum_{k=0}^{\infty}\;\Rightarrow\int_0^\infty dk$$

и заменим k на x. В результате (6) принимает форму записи (8), а следовательно, (8) является частным случаем (6), т.е. описывает случай, когда $x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')$ имеет δ-образную форму, соответствующую пре дельно анизотропному рассеяние света.

В некоторых задачах представляет интерес форма тела яркости в области больших углов рассеяння света (в задачах видения - соответственно помеха обратного рассеяния). Для ее расчета воспользуемся методом возмущения по малому параметру x_0 (6), т.е. воспользуемся представлением

$$x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')=ax_{\text{ост}}(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')+x_0$$

где $x_{\text{ост}}(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')$ - остронаправленная часть реальной $x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')$, для которой справедливо решение УПИ (6); a - нормировочный коэффициент.

Общее решение (2) в этом случае находится в виде ряда

$$L(r,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}x_0^n L_n(r,\mu)\,, \tag{9}$$

однако на практике достаточно воспользоваться лишь двумя первыми членами ряда, а именно, $L_0(r,\mu)$ и $L_1(r,\mu)$. Для них с учетом (2) и (9) имеет место система уравнений

$$\mu\frac{\partial L_0(r,\mu)}{\partial z}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial L_0(r,\mu)}{\partial\mu}+\varepsilon L_0(r,\mu)=\frac{a\Lambda\varepsilon}{4\pi}\oint x_{\text{ост}}(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')L_0(r,\mu')d\hat{\mathbf{l}}'\,, \tag{10}$$

$$\mu\frac{\partial L_1(r,\mu)}{\partial z}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial L_1(r,\mu)}{\partial\mu}+\varepsilon L_1(r,\mu)=\frac{a\Lambda\varepsilon}{4\pi}\oint x_{\text{ост}}(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')L_1(r,\mu')d\hat{\mathbf{l}}'+\frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\oint L_0(r,\mu')d\hat{\mathbf{l}}'\,. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что решением (10) служит (6), но с заменой Λ на Λa. Уравнение (11) описывает ДСП в среде при распределении в ней изотропных источников. Нам известна функция Грина этого уравнения $L_0(r,\mu)$, а, следовательно

$$L_1(r,\mu)=\frac{\varepsilon\Lambda}{4\pi}\int\limits_{(V)} E_0(\mathbf{R})L_0(\mathbf{R}-\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})dV(\mathbf{R}) \ .$$

Поскольку зависимость $L_0(r,\mu)$ от угла в реальных мутных средах значительно сильнее зависимости от расстояния, то нетрудно получить

$$L_1(r,\mu)=\frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\exp\left[-\varepsilon(1-\Lambda)(R+l)\right]}{R^2}dl,\ \ \mathbf{R}=\mathbf{r}-l\hat{\mathbf{l}} \ .$$

Полученное решение УПИ (6) чрезвычайно удобно для использования в инженерных расчетах ДСП излучателей с произвольным светораспределением. Например, в случае излучателя, обладающего направленным световым пучком ω с распределением сила света

$$I(\theta)=I_0\varphi(\theta)=I_0\sum_{k=0}^{N}\frac{2k+1}{4\pi}g_k\,\mathrm{P}_k(\mu),\ \ \mu=\cos\theta \ .$$

распределение $E_0(r,\mu)$ (в случае сред с наличием сильно анизотропного рассеяния света оно идентично распределении освещенности $E\,(r,\mu)$) определяется интегралом свертки, где в качестве функции Грина используется (6), т.е.

$$E(r,\mu)=\int\limits_{(\omega)} I(\theta)E_0(r,\gamma)d\omega(\theta)=\frac{I_0}{r^2}\mathrm{e}^{-\varepsilon r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}g_k\exp\left(\varepsilon\Lambda\frac{f_k}{4\pi}\right)\mathrm{P}_k(\mu) \ .$$

Не представляет труда и расчет ДСП излучателя с неосесимметричным световым пучком, но в этих задачах надо пользоваться не $\mathrm{P}_k(\mu)$, а сферическими функциями.

Итак, предлагаемое вниманию новое решение УПИ в рамках мало-углового приближения может явиться мощным инструментом в решении большого класса научных и практических задач входящих в общую фотометрическую теорию ДСП. К тому же полученные результата при определенном физическом обосновании можно использовать для объяснения данных экспериментальных исследований в различных областях теории переноса излучения (в том числе, корпускулярных излучений).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaudasmit S., Saunderson J.L. Multiple Scattering of Electrons,. Part I and II. – Phys. Rev., 1940, v.57, N1, p.24-29.

2. Snyder H.S., Scott W.T. Multiple Scattering of Fast Charged Particles. – Phys. Rev., 1949, v.76, N2, p.220-225.

3. Lewis H.W. Multiple Scattering in an Infmite Medium. - Phys. Rev., 1950, v.78, N5, p.526-529.

4.Савенков В.И., Будак В.П. Расчет светового поля точечного изотропного монохроматического источника света методом сферических гармоник. - Тр./Моск.энерг.ин-т, I960, вып.488, с.42-50.

5.Долин Д.С. О рассеяния узкого пучка света. - Изв.вузов. Радиофизика, 1964, т.7, №2, с.380-382.

6.Ермаков Б.В., Ильинский D.A. 0 распространении световых импульсов в рассеивающей среде. - Изв.вузов. Радиофизика, 1969, т.12, №5, с.694-701.

УДК 551.463.5.

О новом решении уравнения переноса излучения в рамках малоуглового приближения. Будак В.П., Савенков В.И. – Тр./Моск. энерг. ин-т, 1982, вып.591, с.141-144.