

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ДЛЯ РАСЧЕТА
СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ В МУТНЫХ СРЕДАХ С АНИЗОТРОПНЫМ РАССЕЯНИЕМ

Инж. В.П.БУДАК, инж. Г.А.МЕЛЬНИКОВ,
канд.техн.наук ст.научн.сотр. В.И.
САВЕНКОВ (Моск.энерг.ин-т)

Большой класс важных для практики задач по оптической локации, передаче информации и зондированию в естественных средах имеет общую теоретическую базу - фотометрическую теорию диффузного светового поля [1], основой которой является интегро - дифференциальное уравнение переноса излучения (УПИ)

$$(\hat{\mathbf{i}}, \nabla)L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) + \varepsilon L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}) = \frac{\varepsilon \lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}}') dO(\hat{\mathbf{i}}'), \quad (1)$$

$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{i}})$ - яркость светового поля в точке \mathbf{r} по направлению $\hat{\mathbf{i}}$ (здесь и далее "крышечкой" обозначаются единичные векторы); $x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}')$ - индикатриса рассеяния света элементарным объемом среды; ε и Λ - соответственно показатель ослабления и альбедо однократного рассеяния света в среде; $dO(\hat{\mathbf{i}}')$ - элемент телесного угла с ориентацией $\hat{\mathbf{i}}'$.

Точное решение (1) в общем виде, по-видимому, невозможно, а существующие методы приближенного решения УПИ существенным образом зависят от вида $x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}')$, являющейся ядром уравнения, и образуют, две самостоятельные группы, обусловленные характеристиками среды: изотропное и умеренно анизотропное рассеяние и сильно анизотропное рассеяние [2]. С практической точки зрения наибольший интерес представляют среды с сильно анизотропным рассеянием, такие, как атмосферный аэрозоль, морская вода, оптические стекла и т.п.

Совокупность методов решения УПИ в случае сильно анизотропного рассеяния получила в литературе название малоуглового приближения. Условно эту совокупность можно разбить на две группы. К первой относятся методы, основанные на преобразовании УПИ в уравнение типа свертки по угловым переменным с последующим решением модифицированного уравнения методом Фурье-преобразования (3-5). В методах второй группы исходное УПИ приводится к системе дифференциальных уравнений методом сферических гармоник, а затем полученная система решается с допущением о сильной анизотропии тела яркости рассеянного излучения [6-8]. Указанное допущение является общим для любой формы малоуглового приближения, а следствием его является пренебрежение дисперсией путей рассеянных фотонов и обратным рассеянием. В [9] показана эквивалентность обоих подходов при решении УПК в области малых углов рассеяния. В то же время в области больших углов рассеяния второй подход более точен, что позволяет его использовать для широкого класса индикатрис рассеяния. В настоящей статье предпринята попытка дальнейшего развития методов второй группы и проводится сравнение с методами первой группы.

Поскольку во всех случаях решения УПИ в малоугловом приближении получено распределение пространственной освещенности от кол-лимированного излучателя, что согласно теореме оптической взаимности эквивалентно распределений яркости от изотропного излучателя, то остановимся на случае сферической симметрии точечного излучателя. Как показано в [10], этого вполне достаточно для решения большинства практических задач по оптической локации и зондированию. В этом случае УПИ (1) принимает вид

$$\mu \frac{\partial L(r, \mu)}{\partial \mu} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial L(r, \mu)}{\partial \mu} + \varepsilon L(r, \mu) = \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L(r, \mu') dO(\hat{\mathbf{I}}'), \quad (2)$$

где $\mu = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{r}})$, $\mu' = (\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{r}})$.

Разложим функции $L(r, \mu)$ и $x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$ по полиномам Лежандра

$$L(r, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k(r) P_k(\mu);$$

$$x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} f_k P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}').$$

Тогда (2) примет вид бесконечной системы связанных дифференциальных уравнений

$$\frac{k+1}{2k+1} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k+2}{r} \right) C_{k+1}(r) + \frac{k}{2k+1} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k-1}{r} \right) C_{k-1}(r) + b_k C_k(r) = 0 \quad (3)$$

где $b_k = \varepsilon \left(1 - \Lambda \frac{f_k}{4\pi} \right)$.

Для дальнейшего удобнее перейти $Y_k(r) = C_k(r)/r^2$. В этом случае (3) будет выглядеть так:

$$\frac{1}{2k+1} \frac{d}{dr} [(k+1)Y_{k+1}(r) + kY_{k-1}(r)] + \frac{k(k+1)}{2k+1} \frac{1}{r} [Y_{k+1}(r) - Y_{k-1}(r)] + b_k Y_k(r) = 0. \quad (4)$$

При использовании традиционного метода сферических гармоник систему (4) ограничивают небольшим числом уравнений, полагая в ней $Y_{N+1}(r) = 0$. Однако в условиях сильно анизотропного рассеяния необходимо ограничиваться достаточно большим N (для сред типа морской вода $N > 500$), вследствие чего указанная система недоступна для решения даже с использованием современных ЭВМ [11]. Более того, чем меньше углы, в которых определяются значения яркости, тем больше число членов необходимо учитывать. В [12] показано, что решение $L(r, \mu)$ имеет по углу особенности: для нулевой кратности рассеяния δ -особенность, для первой - $1/\sqrt{1-\mu^2}$ и для второй $-\ln(1-\mu)$. Поэтому при решении (4) для задач локации, где угловые размеры световых пучков малы (не превышают 3°), необходимо учитывать значительное число членов.

В малоугловом приближении допускается $Y_{k+1} + Y_{k-1} \approx 2Y_k$, что сводит (4) к легко решаемой системе несвязанных уравнений

[8]. Однако полученное решение УПИ описывает только δ -особенность, что во многих случаях недостаточно. В [13] вводится связь между Y_{N+1} и Y_N , основанная на виде особенностей, но такая процедура в дальнейшем приводит опять к алгоритму, аналогичному традиционному методу сферических гармоник, хотя и значительно его превосходит по точности при одном и том же N .

Допустим, что $Y_k=Y(k,r)$ и $b_k=b(k)$ непрерывно зависят от k и возможно представление

$$Y(r, k \pm 1) \approx Y(r, k) \pm \frac{\partial Y(r, k)}{\partial k},$$

что справедливо в случае монотонной зависимости $L(r, \mu)$ от μ .

В итоге приходим к уравнению

$$\frac{\partial Y(r, k)}{\partial r} + \frac{1}{2k+1} \frac{\partial^2 Y(r, k)}{\partial r \partial k} + \frac{2k(k+1)}{2k+1} \frac{1}{r} \frac{\partial Y(r, k)}{\partial k} + b(k)Y(r, k) = 0. \quad (5)$$

Будем считать, что тело яркости рассеянного излучения достаточно анизотропно, т.е. рассмотрим те расстояния, для которых справедливо неравенство

$$\frac{2k(k+1)}{r} \frac{\partial Y(r, k)}{\partial k} \gg \frac{\partial^2 Y(r, k)}{\partial r \partial k}. \quad (6)$$

В соответствии с (6) уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial Y(r, k)}{\partial r} + \frac{2k(k+1)}{2k+1} \frac{1}{r} \frac{\partial Y(r, k)}{\partial k} + b(k)Y(r, k) = 0. \quad (7)$$

Сделаем в (7) замену переменных $x=k(k+1)$, $Z(r, x)=\ln Y(r, k)$, $B(x)=b(k)$ и получим

$$\frac{\partial Z(r, x)}{\partial r} + \frac{2x}{r} \frac{\partial Z(r, x)}{\partial x} + B(x) = 0. \quad (8)$$

Решение (8) есть сумма решения общего однородного и частного неоднородного уравнений. Общее решение однородного уравнения представляет собой произвольную функцию $\psi(r/x)$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $Z(r, x)=r\varphi(x)$. При этом

$$\varphi(x) = -\varepsilon + \frac{\Lambda \varepsilon}{8\pi\sqrt{x}} \int \frac{f(\xi)(2\xi+1)}{\sqrt{\xi(\xi+1)}} d\xi.$$

Окончательно имеем

$$Y(r, k) = \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{\Lambda}{8\pi\sqrt{k(k+1)}} \int \frac{f(\xi)(2\xi+1)}{\sqrt{\xi(\xi+1)}} d\xi \right) + \psi \left(\frac{r}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \right]. \quad (9)$$

Далее, нисколько не ограничивая общности, допустим, что $x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$ представляется в виде уравнения Хеньи-Гринотейна [8], т.е. $f_k=4\pi g^k$, где g - средний косинус индикатрисы рассеяния. Тогда из (9) следует

$$Y(r, k) = \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{\Lambda}{8\pi\sqrt{k(k+1)}} \int \frac{g^\xi (2\xi+1)}{\sqrt{\xi(\xi+1)}} d\xi \right) + \psi \left(\frac{r}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \right]. \quad (10)$$

Выражение (10) можно упростить, учитывая, что рассматриваются достаточно большие k . В этом случае $\sqrt{k(k+1)} \approx k+0.5$ и (10) будет выглядеть так:

$$Y(r, k) = \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{2\Lambda}{\ln g} \frac{g^k}{2k+1} \right) + \psi \left(\frac{r}{\sqrt{k(k+1)}} \right) \right]. \quad (11)$$

Функция $\psi(r/(2k+1))$ учитывает граничные условия, которые в случае малоуглового приближения представляют собой [8]

$$\begin{cases} Y(r, k) \rightarrow 1 & \text{при } r \rightarrow 0, \\ Y(r, k) \rightarrow 0 & \text{при } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (12)$$

С учетом (12) значение $\psi(0)=0$. Если пренебречь дисперсией путей рассеянных фотонов, то $\psi(\zeta)$ есть линейная функция ζ . Следовательно, в этом случае имеем

$$Y(r, k) = \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{2\Lambda}{\ln g} \frac{g^k - C_0}{2k+1} \right) \right]. \quad (13)$$

Константу C_0 в (13) можно определить из условия, что в пренебрежении дисперсией путей рассеянных фотонов освещенность, т.е. $Y(r, 1)$, убывает экспоненциально с показателем $\varepsilon(1-\Lambda)$. Откуда получаем $C_0 = g - 1.5 \ln g$.

Окончательно уравнение для тела яркости запишется так:

$$L(r, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi r^2} \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{2\Lambda}{\ln g} \frac{g^k - C_0}{2k+1} \right) \right] P_k(\mu). \quad (14)$$

Проанализируем (14). Для этого запишем его в виде

$$L(r, \mu) = \frac{e^{-\varepsilon r}}{4\pi r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \left(\frac{2\Lambda \varepsilon r}{\ln g} \frac{g^k - C_0}{2k+1} \right)^m P_k(\mu). \quad (15)$$

что равносильно разложению по кратностям рассеяния. Нетрудно видеть, что нулевая кратность описывает прямое излучение точно. Таким образом, решение содержит δ -особенность по углу. Далее для первой кратности имеем

$$L_1(r, \mu) = \frac{\Lambda \varepsilon e^{-\varepsilon r}}{2\pi r \ln g} \sum_{k=0}^{\infty} (g^k - C_0) P_k(\mu).$$

Учитывая свойства производящей функции для полиномов Лежандра, получим

$$L_1(r, \mu) = \frac{\Lambda \varepsilon e^{-\varepsilon r}}{2\pi r \ln g} \left(\frac{1}{\sqrt{1+g^2-2g\mu}} - \frac{C_0}{\sqrt{2-2\mu}} \right). \quad (16)$$

Отсюда видно, что найденное решение описывает и особенность $1/\sqrt{1-\mu^2}$. Выражение для второй кратности весьма громозд-

ко, но и оно также описывает логарифмическую особенность, т.е. $-\ln(1-\mu)$. Таким образом, найденное решение описывает все особенности решения УПИ (2).

Для оценки точности полученного решения УПИ сопоставим точное выражение для первой кратности рассеяния излучения, выражение (16), а также аналогичное выражение, полученное в рамках другой формы малоуглового приближения [3-5] для случая индикатрисы Хеньи-Гринштейна:

$$L_1(r, \theta) = \frac{\Lambda \varepsilon e^{-\varepsilon r}}{2\pi r(1-g)} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\sqrt{(1-g)^2 + \theta^2}} \right), \quad \theta = \arccos \mu. \quad (17)$$

Точное выражение для яркости первичного рассеяния [14]

$$L_1(r, \theta) = \frac{\Lambda \varepsilon e^{-\varepsilon r}}{4\pi r \sin \theta} \int_0^\pi \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g \cos \eta)^{3/2}} \exp \left[-\varepsilon r \sin \theta \left(\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right] d\eta,$$

или в пренебрежении дисперсией путей рассеянных фотонов

$$L_1(r, \theta) = \frac{\Lambda \varepsilon e^{-\varepsilon r}}{4\pi r \sin \theta} \int_0^\pi \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g \cos \eta)^{3/2}} d\eta. \quad (18)$$

Из рис.1, где представлено сравнение расчетов по (16) - (18) для различных g , видно, что решение (16) значительно лучше описывает яркость во всем диапазоне углов рассеяния и при достаточно широком варьировании остроты индикатрисы рассеяния. Выражение (17) удовлетворительно описывает яркость излучения в диапазоне углов, меньших 3° . На рис.2 показано влияние дисперсии путей на величину яркости первичного рассеяния.

Если нас интересует распределение пространственной освещенности в поле реального светового пучка, то согласно [8] и (14) имеем

$$E_0(r, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi r^2} a_k \exp \left[-\varepsilon r \left(1 - \frac{2\Lambda}{\ln g} \frac{g^k - C_0}{2k+1} \right) \right] P_k(\mu),$$

где $\mu = (\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{q}}$ - направление оптической оси реального светового пучка, сила света которого есть

$$I(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} a_k P_k(\mu).$$

В случае гауссового светового пучка

$$I(\mu) = I_0 \exp \left(-\frac{\alpha^2}{u_0^2} \right), \quad \alpha = \arccos \mu,$$

разложение по полиномам Лежандра при ($u_0 \ll 1$) выглядят так:

$$I(\mu) \approx I_0 \exp \left(-\frac{2}{u_0^2} (1-\mu) \right) = I_0 \exp \left(-\frac{2}{u_0^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} q_k P_k(\mu).$$

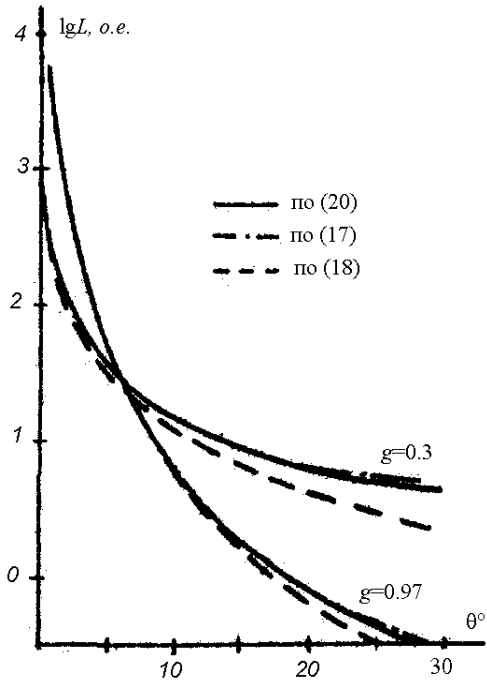


Рис. 1

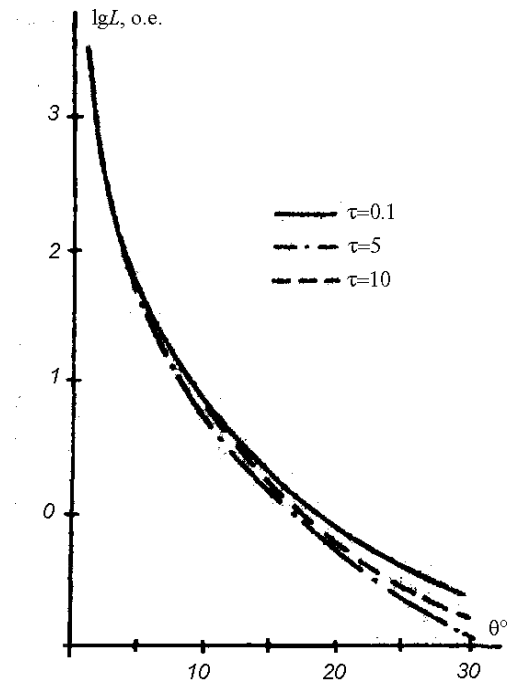


Рис. 2

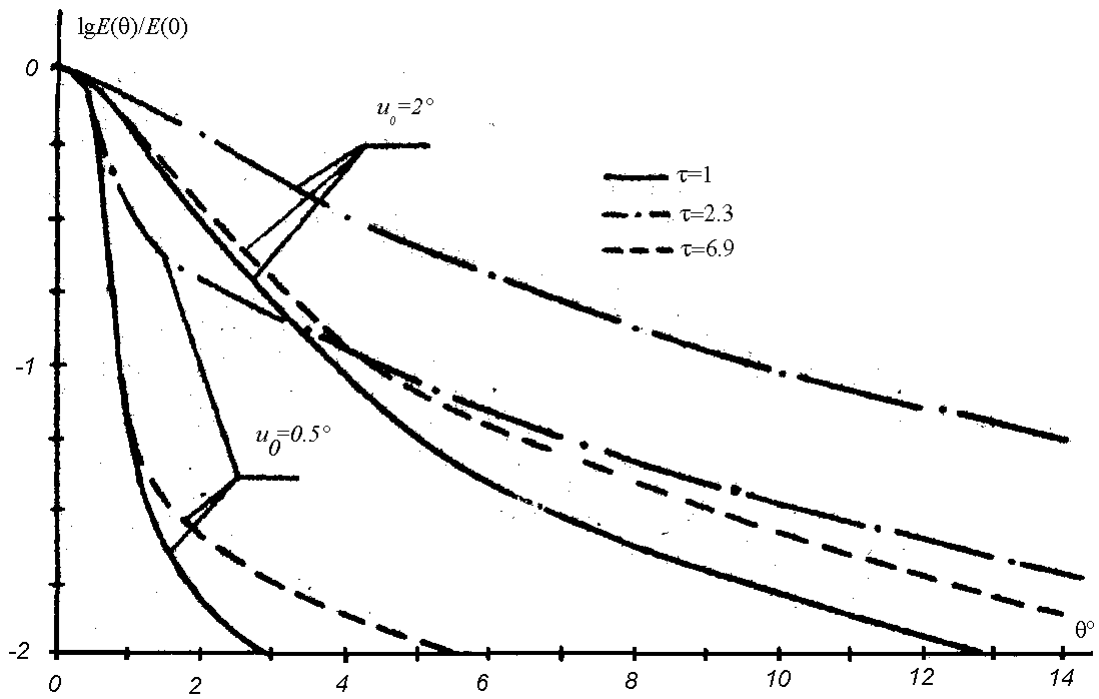


Рис. 3

В соответствии с рекуррентными соотношениями для $P_k(\mu)$ имеем

$$q_k = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{2}{u_0^2} \mu\right) P_k(\mu) d\mu = \frac{2}{u_0^2(2k+1)} (q_{k-1} - q_{k+1}). \quad (19)$$

Выполним в (19) преобразования, аналогичные (4) и (6), т.е.

$$q(k) = -\frac{4}{u_0^2(2k+1)} \frac{dq(k)}{dk} \Rightarrow q_k = \exp\left[-\frac{k(k+1)}{4} u_0^2 + C'\right],$$

где C' - некоторая константа.

Следовательно,

$$a_k = C \exp\left[-\frac{k(k+1)}{4} u_0^2\right], \quad C = \exp\left[C' + \frac{2}{u_0^2}\right].$$

Константу C определим из условия

$$C = a_0 = \oint I(\mu) dO(\mu) \approx 2\pi I_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\alpha^2}{u_0^2}\right) \alpha d\alpha = \pi I_0 u_0^2 /$$

Откуда находим

$$a_k = \pi I_0 u_0^2 \exp\left[-\frac{k(k+1)}{4} u_0^2\right].$$

Таким образом, окончательно расчетное выражение для пространственной освещенности от узкого гауссового светового пучка представляет собой

$$E_0(r, \mu) = \frac{I_0 u_0^2}{4r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \exp\left[-\frac{k(k+1)}{4} u_0^2 - \varepsilon r \left(1 - \frac{2\Lambda g^k - C_0}{\ln g} \frac{2k+1}{2k+1}\right)\right] P_k(\mu). \quad (20)$$

На рис.3 приведены графики относительного распределения освещенности $E(\theta)/E(0)$ в функции угла θ , оптического расстояния τ и параметра светораспределения пучка u_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Будаков В.П., Мельников Г.А., Савенков В.И. - Светотехника, 1982, №11, с.13-17.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние воли в случайно-неоднородных средах. - М.: Мир, 1981. Т.1. - 318с; Т.2. - 278с.
3. Snyder H.S., Scott W.T. - Phys. Rev., 1949, v.76, N2, p.220-225.
4. Bremmer H. - Rad.Sci., 1964, v.68, N9, p.967-962.
5. Долин Л.С. - Изв. Вузов. Радиофизика, 1964, т.7, №2, с.380-382.
6. Goudsmit S., Saunderson J.L. - Phys. Rev, v.57, V.58, N1, p.24-29; v.58, N1, p.36-42.

7. Wang M.C., Guth E. - Phys. Rev., 1951, v.84, N6, p1092-1111.
8. Будак В.П., Савенков В.И. - Тр./Моск.энерг.ин-т, 1982, вып.591, с.141-144.
9. Lewis H.W. - Phys. Rev., 1950, v.78, N5, p.526-529.
10. Браво-Животовский Д.М., Долин Л.С, Лучинин А.Г., Савельев В.А. - Изв. АН СССР. ФАО, 1969, т.5, №7, с.672-682.
11. Савенков В.И., Будак В.П. - Тр./Моск.энерг.ин-т, 1980, вып.488, с.42-50.
12. Петров Э.Е., Усачев Л.Н. - В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. - М.: Госатомиздат, 1962, с.58-72.
13. Pomraning G.C. - Nukleonik, 1964, v.6, N7, p.148-356.
14. Савенков В.И., Мельников Г.А. - В кн.: Световые поля в океане. М.: И-т океанологии АН СССР, 1980, с.98-110.

УДК 551.463.5;535.36

Использование метода сферических гармоник для расчета световых полей в мутных средах с анизотропным рассеянием. Будак В.П., Мельников Г.А, Савенков В.И. - В кн.: Межведомств. тем. сб. М.: Моск.энерг.ин-т, 1983, №12, с.9-16.